Κεφάλαιο 6

Ανισώσεις

6.1 Ανισώσεις πρώτου βαθμού

Θυμηθείτε ότι ένας πραγματικός αριθμός μπορεί να είναι

- ή θετικός
- ή αρνητικός
- ή μηδέν

Παρατήρηση 6.1.1 *Ισχύουν τα παρακάτω*

- *Μπορούμε να προσθέσουμε στα μέλη μιας ανίσωσης τον ίδιο αριθμό. Η ανίσωση που θα προκύψει είναι ισοδύναμη με την αρχική. Π.χ.*

$$3x + 5 < 17 \iff 3x + 5 - 5 < 17 - 5 \iff 3x < 12$$

- *Μπορούμε να αφαιρέσουμε στα μέλη μιας ανίσωσης τον ίδιο αριθμό. Η ανίσωση που θα προκύψει είναι ισοδύναμη με την αρχική. Π.χ.*

$$3x - 5 < 17 \iff 3x - 5 + 5 < 17 + 5 \iff 3x < 22$$

- *Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο αριθμό.*
  - *Αν ο αριθμός είναι αρνητικός τότε αλλάζει η φορά της ανίσωσης. Η ανίσωση που θα προκύψει είναι ισοδύναμη με την αρχική. Π.χ.*

$$-\frac{x}{2} \leq 6 \iff -2 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) \geq -2 \cdot 6 \iff x \geq -12$$

  - *Αν ο αριθμός είναι θετικός τότε δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης. Η ανίσωση που θα προκύψει είναι ισοδύναμη με την αρχική. Π.χ.*

$$\frac{x}{3} \leq -6 \iff 3 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) \leq 3 \cdot (-6) \iff x \leq -18$$

- *Μπορούμε να διαιρέσουμε τα μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο αριθμό.*
  - *Αν ο αριθμός είναι αρνητικός τότε αλλάζει η φορά της ανίσωσης. Η ανίσωση που θα προκύψει είναι ισοδύναμη με την αρχική. Π.χ.*

$$-3x < 21 \iff \frac{-3x}{-3} > \frac{21}{-3} \iff x > -7$$

  - *Αν ο αριθμός είναι θετικός τότε δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης. Η ανίσωση που θα προκύψει είναι ισοδύναμη με την αρχική. Π.χ.*

$$3x < -21 \iff \frac{3x}{3} < \frac{-21}{3} \iff x < -7$$

Πρέπει λοιπόν να θυμόμαστε ότι

- Όταν διαιρούμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με θετικό αριθμό τότε δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης.
- Όταν διαιρούμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με <u>αρνητικό</u> αριθμό τότε <u>αλλάζει</u> η φορά της ανίσωσης.

Παρατήρηση 6.1.2 *Μια ανίσωση μπορεί είτε αδύνατη είτε αόριστη*

Οι παρακάτω ανισώσεις είναι αόριστες	*Οι παρακάτω ανισώσεις είναι αδύνατες*
• $0 \cdot x <$ *θετικός αριθμός*	• $0 \cdot x >$ *θετικός αριθμός*
• $0 \cdot x \leq$ *θετικός αριθμός*	• $0 \cdot x \geq$ *θετικός αριθμός*
• $0 \cdot x >$ *αρνητικός αριθμός*	• $0 \cdot x <$ *αρνητικός αριθμός*
• $0 \cdot x \geq$ *αρνητικός αριθμός*	• $0 \cdot x \leq$ *αρνητικός αριθμός*
• $0 \cdot x \leq 0$	• $0 \cdot x < 0$
• $0 \cdot x \geq 0$	• $0 \cdot x > 0$

Για τις αδύνατες και αόριστες εξισώσεις ισχύουν τα παρακάτω παραδείγματα

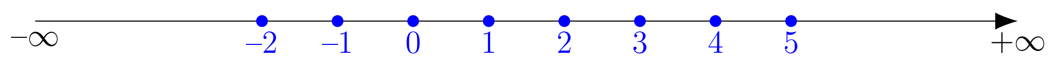
$0 \cdot x <$ (θετικός αριθμός) $0 \cdot x \leqslant$ (θετικός αριθμός)	Παράδειγματα: • $0 \cdot x < 7 \iff 0 < 7 \iff x \in \mathbb{R}$ • $0 \cdot x \leqslant 9 \iff 0 \leqslant 9 \iff x \in \mathbb{R}$
$0 \cdot x <$ (αρνητικός αριθμός) $0 \cdot x \leqslant$ (αρνητικός αριθμός)	Παράδειγματα: • $0 \cdot x < -3 \iff 0 < -3 \iff$ αδύνατη • $0 \cdot x \leqslant -\sqrt{5} \iff 0 \leqslant -\sqrt{5} \iff$ αδύνατη
$0 \cdot x >$ (θετικός αριθμός) $0 \cdot x \geqslant$ (θετικός αριθμός)	Παράδειγματα: • $0 \cdot x > 8 \iff 0 > 8 \iff$ αδύνατη • $0 \cdot x \geqslant \sqrt{3} \iff 0 \geqslant \sqrt{3} \iff$ αδύνατη
$0 \cdot x >$ (αρνητικός αριθμός) $0 \cdot x \geqslant$ (αρνητικός αριθμός)	Παράδειγματα: • $0 \cdot x > -\sqrt[3]{9} \iff 0 > -\sqrt[3]{9} \iff x \in \mathbb{R}$ • $0 \cdot x \geqslant -10 \iff 0 \geqslant -10 \iff x \in \mathbb{R}$
$0 \cdot x \leqslant 0$ $0 \cdot x \geqslant 0$	$0 \cdot x \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{ή } 0 < 0 \Leftrightarrow \text{ αδύνατη} \\ \text{ή } 0 = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ Επίσης $0 \cdot x \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \text{ή } 0 > 0 \Leftrightarrow \text{ αδύνατη} \\ \text{ή } 0 = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
$0 \cdot x < 0$ $0 \cdot x > 0$	$0 \cdot x < 0 \iff 0 < 0 \iff$ αδύνατη Επίσης $0 \cdot x > 0 \iff 0 > 0 \iff$ αδύνατη

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

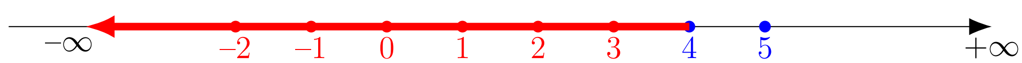
Παράδειγμα 6.1.1 Να γίνει γεωμετρική αναπαράσταση καθώς και να γραφτεί το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $x < 4$

Λύση

Για να κάνουμε την γεωμετρική αναπαράσταση των λύσεων θα χρησιμοποιήσουμε τον άξονα των πραγματικών αριθμών



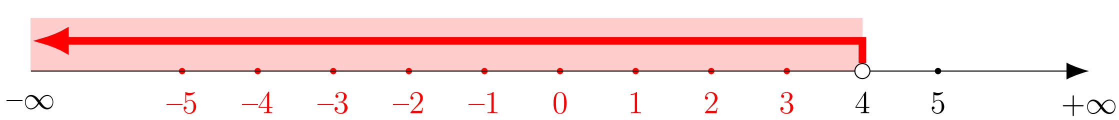
Στη συνέχεια σημειώνουμε το κομμάτι της ευθείας στο οποίο βρίσκονται οι λύσεις της ανίσωσης.



Το 4 δεν ανήκει στις λύσεις της ανίσωσης. Αυτό το συμβολίζουμε με έναν ανοικτό κύκλο στο σημείο με τον αριθμό 4.

Θα συμβολίζουμε τις λύσεις της ανίσωσης με ένα βέλος που δεν ακουμπάει την ευθεία των πραγματικών αριθμών και στον αριθμό 4 που δεν ανήκει στις λύσεις θα σημειώσουμε έναν κύκλο χωρίς να χρωματίσουμε το εσωτερικό του. Αν θα έπρεπε να συμπεριλάβουμε το 4 στο σύνολο λύσεων θα χρωματίζαμε το εσωτερικό του κύκλου.

Απάντηση Το σύνολο λύσεων είναι $x \in (-\infty, 4)$.

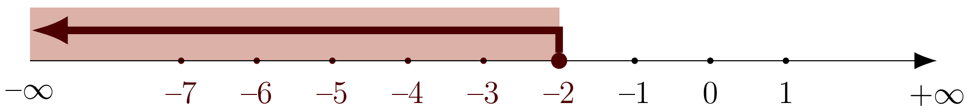


Παράδειγμα 6.1.2 Να γίνει γεωμετρική αναπαράσταση καθώς και να γραφτεί το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\quad x \leqslant -2$

Λύση

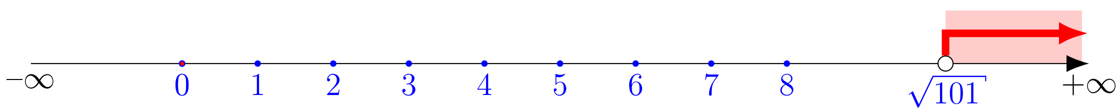
Σε αυτό το παράδειγμα το -2 ανήκει στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης. Συνεπώς στη γεωμετρική αναπαράσταση ο κύκλος στο σημείο -2 θα είναι γεμισμένος.

Απάντηση Το σύνολο λύσεων είναι $x \in (-\infty, -2]$.



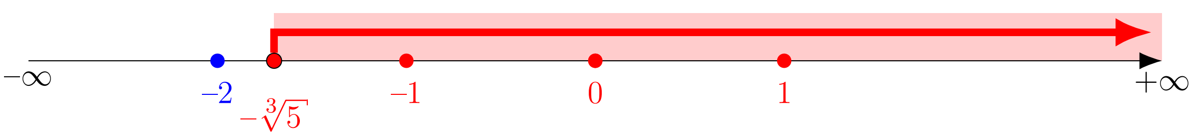
Παράδειγμα 6.1.3 Να γίνει γεωμετρική αναπαράσταση καθώς και να γραφτεί το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\quad x > \sqrt{101}$

Απάντηση Το σύνολο λύσεων είναι $x \in \left(\sqrt{101}, +\infty\right)$.



Παράδειγμα 6.1.4 Να γίνει γεωμετρική αναπαράσταση καθώς και να γραφτεί το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\quad x \geqslant -\sqrt[3]{5}$

Απάντηση Το σύνολο λύσεων είναι $x \in \left[-\sqrt[3]{5}, +\infty\right)$.

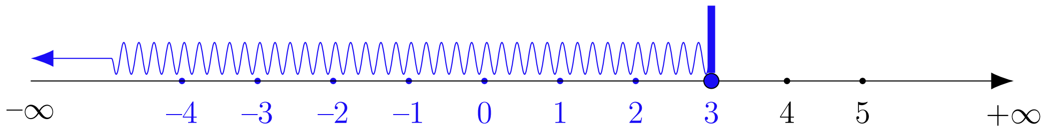


Παράδειγμα 6.1.5 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις (συναλήθευση) με τη βοήθεια της γεωμετρικής αναπαράστασης και να γραφτεί το σύνολο των κοινών λύσεων των παρακάτω ανισώσεων.

$$\mathrm{x} \leqslant 3 \quad \text{και} \quad \mathrm{x} \geqslant -2$$

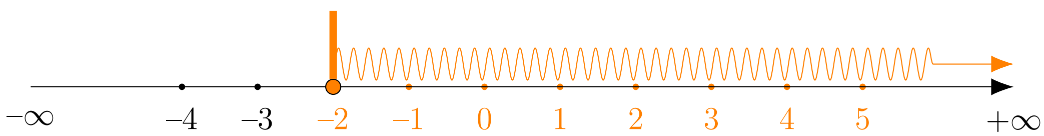
Λύση

Η ανίσωση $\mathrm{x} \leqslant 3$ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών

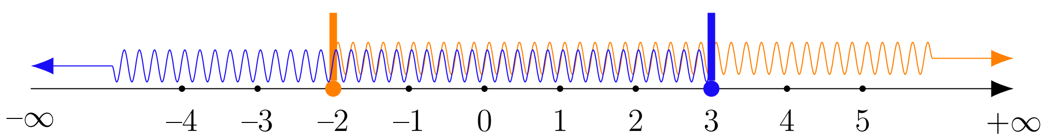


Το σύνολο λύσεων είναι $\mathrm{x} \in (-\infty, 3]$

Η ανίσωση $\mathrm{x} \geqslant -2$ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών



Αν βάλουμε και τις δύο γεωμετρικές αναπαραστάσεις μαζί



Το σύνολο λύσεων είναι $\mathrm{x} \in [-2, 3]$

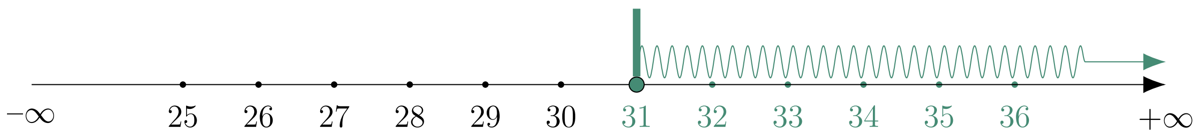
Απάντηση Το σύνολο των κοινών λύσεων είναι $\mathrm{x} \in [-2, 3]$.

Παράδειγμα 6.1.6 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις (συναλήθευση) με τη βοήθεια της γεωμετρικής αναπαράστασης και να γραφτεί το σύνολο των κοινών λύσεων των παρακάτω ανισώσεων.

$$\mathrm{x} \geqslant 31 \quad \text{και} \quad \mathrm{x} \leqslant 31$$

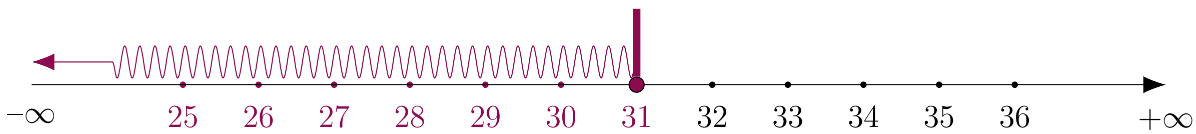
Λύση

Για την ανίσωση $\mathrm{x} \geqslant 31$, οι λύσεις στην ευθεία των πραγματικών αριθμών θα είναι:



οπότε το σύνολο λύσεων είναι $\mathrm{x} \in [31, +\infty)$

Για την ανίσωση $\mathrm{x} \leqslant 31$ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών θα έχουμε



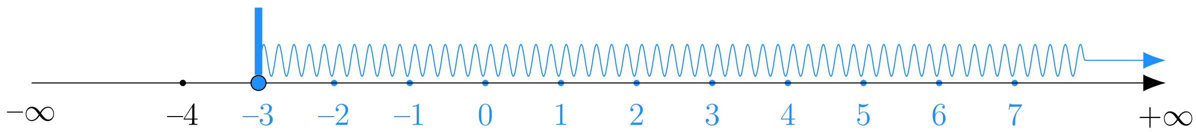
άρα $\mathrm{x} \in (-\infty, 31]$. Οι δύο ανισώσεις έχουν κοινή λύση **μόνο την τιμή 31**.

Απάντηση Το σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων είναι $\mathrm{x} \in \{31\}$

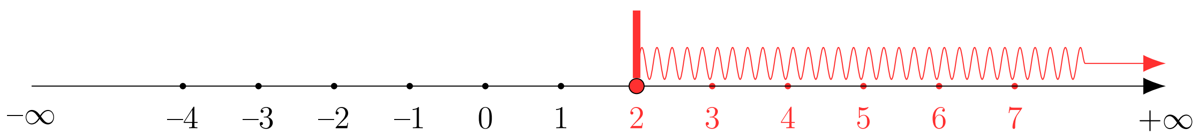
Παράδειγμα 6.1.7 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις (συναλήθευση) με τη βοήθεια της γεωμετρικής αναπαράστασης και να γραφτεί το σύνολο των κοινών λύσεων των παρακάτω ανισώσεων.

$$x \geqslant -3, \quad x \geqslant 2 \quad \text{και} \quad x \leqslant 5$$

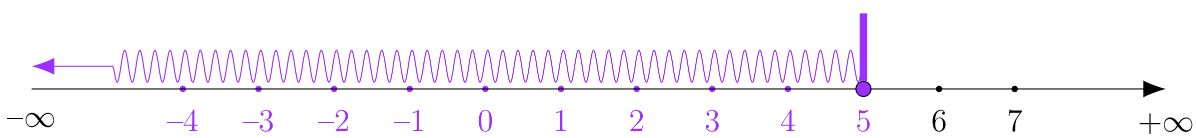
Για την ανίσωση $x \geqslant -3$



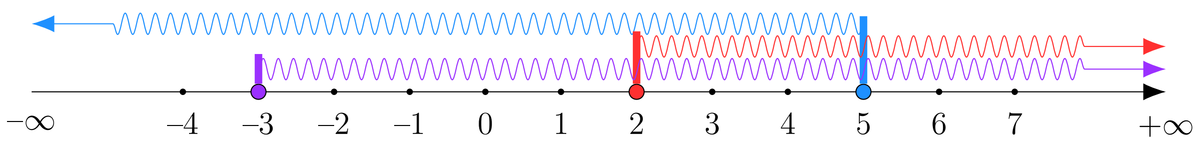
Για την ανίσωση $x \geqslant 2$



Για την ανίσωση $x \leqslant 5$



Συναλήθευση:



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.1.1 Να γίνει η παρακάτω αντιστοίχιση

α΄) $0x > 6$

β΄) $0x < 2$

γ΄) $0x \geqslant 0$

δ΄) $0x \geqslant 4$

ε΄) $0x \leqslant -5$

ϛ΄) $0x > 0$

ζ΄) $0x < -3$

η΄) $0x \leqslant 7$

ϑ΄) $0x > -8$

ι΄) $0x > 0$

ια΄) $0x > -9$

ιβ΄) $0x \geqslant 0$

1) $x \in \mathbb{R}$

2) Αδύνατη

6.1.2 Να βρείτε τις λύσεις των παρακάτω ανισώσεων, να αναπαραστήσετε γραφικά τις λύσεις τους και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

1) $-18x - (x - 9) \geq 2 - 15(x - 1)$

2) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{2x - 5}{12} < 2 - \dfrac{5 - x}{4}$

6.1.3 (*)Να βρείτε τις λύσεις των παρακάτω ανισώσεων, να αναπαραστήσετε γραφικά τις λύσεις τους και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

1) $\dfrac{x - 1}{4} - \dfrac{x + 1}{3} - \dfrac{x - 1}{12} \leqslant -\dfrac{x + 3}{6}$

6.1.4 (*) Να γίνει συναλήθευση με τη βοήθεια της γεωμετρικής αναπαράστασης και να γραφτεί το σύνολο λύσεων ων παρακάτω ανισώσεων.

1) $\left.\begin{array}{l} x \leqslant 5 \\ x \geqslant -1 \end{array}\right\}$

2) $\left.\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ x \geqslant -2 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{l} x \geqslant -7 \\ x \geqslant -10 \\ x < -1 \end{array}\right\}$

4) $\left.\begin{array}{l} x \leqslant -4 \\ x \geqslant 1 \end{array}\right\}$

5) $\left.\begin{array}{l} x > -5 \\ x \leqslant 7 \end{array}\right\}$

6) $\left.\begin{array}{l} x \geqslant \dfrac{2}{3} \\ 0x < 7 \end{array}\right\}$

7) $\left.\begin{array}{l} x < \dfrac{\sqrt{3}}{5} \\ 0 \cdot x \geqslant -8 \end{array}\right\}$

8) $\left.\begin{array}{l} x > 4 \\ 0 \cdot x \leqslant 0 \end{array}\right\}$

9) $\left.\begin{array}{l} x \leqslant \dfrac{7}{3} \\ 0 \cdot x \geqslant 0 \end{array}\right\}$

10) $\left.\begin{array}{l} x > \dfrac{6}{11} \\ x < \dfrac{7}{11} \end{array}\right\}$

11) $\left.\begin{array}{l} x > \dfrac{5}{10} \\ x \leqslant \dfrac{5}{9} \end{array}\right\}$

12) $\left.\begin{array}{l} x < \dfrac{6}{7} \\ x \geqslant \dfrac{4}{5} \end{array}\right\}$

6.1.5 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων, να αναπαραστήσετε γραφικά τις λύσεις τους και να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι λύσεις τους.

1) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2(1 - x) > 2x + 7 \\ -5x \geqslant 12 - 2(7x - 3) \end{array}\right\}$

2) $\left.\begin{array}{l} -4(x + 2) \geqslant 6 - 2(x - 3) \\ -3(x - 4) \geqslant -5(x + 1) \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{l} 5 - 3(x - 1) > -4 \\ -2 - (-x - 1) \leqslant 1 \end{array}\right\}$

6.2 Ανισώσεις δευτέρου βαθμού

Το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\alpha(x-x_1)(x-x_2)$		ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	

Το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα.

x	$-\infty$		$-\dfrac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$		$+$	0	$+$	
$\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$		ομόσημο του α	0	ομόσημο του α	
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ομόσημο του α	

Το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

x	$-\infty$ $+\infty$
$\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\dfrac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}$	$+$
$\alpha\left[\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\dfrac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right]$	ομόσημο του α
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α

Παράδειγμα 6.2.1 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

1) $(x-3)(x-2) > 0$

2) $x^2 - 5x + 6 > 0$

Οι δύο παραστάσεις είναι ίδιες δηλαδή $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

Αν δεν χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία του τριωνύμου τότε

- $x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$
- $x - 2 > 0 \Longleftrightarrow x > 2$
- $x - 2 < 0 \Longleftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x − 2		−	0	+	

Επίσης

- $x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 3$
- $x - 3 > 0 \Longleftrightarrow x > 3$
- $x - 3 < 0 \Longleftrightarrow x < 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x − 3		−	0	+	

Το πρόσημο των δύο παραστάσεων μαζί, καθώς και το γινόμενό τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x − 3		−		−	0	+	
x − 2		−	0	+		+	
$(x-2)\cdot(x-3)$		+	0	−	0	+	

Άρα $(x-3)(x-2) > 0 \Longleftrightarrow x \in (\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Αν χρησιμοποιήσω τη θεωρία για το πρόσημο του τριωνύμου θα βρω τα ίδια αποτελέσματα. Πράγματι

η εξίσωση $x^2 - 5x + 6 = 0$

έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		Αν η μεταβλητή πάρει σαν τιμή κάποιο αριθμό από αυτό το διάστημα τότε το πρόσημο της παράστασης θα είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή **θετικό**	0	Αν η μεταβλητή πάρει σαν τιμή κάποιο αριθμό από αυτό το διάστημα τότε το πρόσημο της παράστασης θα είναι ετερόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή **αρνητικό**	0	Αν η μεταβλητή πάρει σαν τιμή κάποιο αριθμό από αυτό το διάστημα τότε το πρόσημο της παράστασης θα είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή **θετικό**	

Άρα $x^2 - 5x + 6 > 0 \iff x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.2.1 Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις

1) $x^2 > 9 \Longleftrightarrow$ (ή $\quad x > -3,\quad$ ή $\quad x > 3$)

2) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\alpha < 0$ και $\Delta > 0$ τότε είναι θετικό μεταξύ των ριζών του.

3) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$ τότε είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4) Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει $\alpha < 0$ και $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0$

5) Αν η εξίσωση $3x^2 + \alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ τότε η ανίσωση $3x^2 + \alpha x + \beta \leq 0$ είναι αδυνατη $x \in \mathbb{R}$

6.2.2 1) Να βρεθεί το πρόσημο του τριωνύμου $4x^2 - 4x - 15 = 0$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$

2) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = \left[4\left(\frac{2018}{2019}\right)^2 - 4\left(\frac{2018}{2019}\right) - 15\right]\left[4\left(\frac{2018}{2019}\right)^2 + 4\left(\frac{2018}{2019}\right) - 15\right]$$

6.2.3 Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις

1) $6x^2 + x - 1 \leq 0$

2) $x^2 + x - 6 \geq 0$

3) $2x^2 + 13x + 18 \geq 0$

4) $-20x^2 + 9x + 20 \leq 0$

5) $x^2 + 10x + 24 \leq 0$

6) $x^2 + 10x - 24 \leq 0$

7) $x^2 - 10x - 24 \geq 0$

8) $x^2 - 10x + 24 \geq 0$

9) $x^2 + 8x + 15 \leq 0$

10) $x^2 + 7x + 10 \geq 0$

11) $2x^2 + x - 1 \geq 0$

12) $10x^2 + 7x + 1 \geq 0$

13) $x^2 + x - 2 \geq 0$

14) $x^2 + 9x + 20 \geq 0$